

УДК 621.867.522

DOI: <https://doi.org/10.32347/tb.2025-43.0611>**¹Тетяна Нестеренко,**

доцент кафедри нафтогазової інженерії та технологій

ORCID : <https://orcid.org/0000-0002-2387-8575>, e-mail : poltava.tanya.nesterenko@gmail.com**¹Юрій Тікан**

аспірант кафедри галузевого машинобудування та мехатроніки

ORCID : <https://orcid.org/0009-0007-5547-1693>, e-mail : spaceagroteam@ukr.net¹Національний університет «Полтавська політехніка імені Юрія Кондратюка»,
просп. Першотравневий 24, м. Полтава, 36011, Україна

ОПТИМІЗАЦІЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ПАРАМЕТРІВ ВІБРАЦІЙНИХ ТРАНСПОРТЕРІВ З НЕЛІНІЙНИМИ ПРУЖНИМИ ЗВ'ЯЗКАМИ

АНОТАЦІЯ. У статті розглянуто динамічні характеристики резонансних вібраційних транспортерів з нелінійними пружними зв'язками та виконано оптимізацію їх геометричних параметрів на основі спектрального аналізу вигинних коливань робочого органа. Запропоновано узагальнену математичну модель, яка враховує нелінійність жорсткісних характеристик опор і міжсекційних з'єднань, а також інерційний і дисипативний внесок транспортованого середовища. Проаналізовано вплив довжини секцій і параметрів пружних елементів на спектр власних частот та умови виникнення небезпечних резонансних режимів, у тому числі з урахуванням вищих гармонік збудження. Обґрунтовано критерії вибору раціональних геометричних параметрів, спрямовані на підвищення стабільності роботи, енергоефективності та довговічності обладнання. Отримані результати можуть бути використані при проектуванні та модернізації вібраційних транспортерів для гірничодобувної, будівельної, металургійної та агропромислової галузей.

Ключові слова: вібраційний транспортер, резонансні коливання, нелінійні пружні зв'язки, спектральний аналіз, геометрична оптимізація, енергоефективність, транспортування сипких матеріалів, буровий розчин.

OPTIMIZATION OF GEOMETRIC PARAMETERS OF VIBRATING CONVEYORS WITH NONLINEAR ELASTIC CONNECTIONS

ABSTRACT. This paper investigates the dynamic characteristics of resonant vibrating conveyors with nonlinear elastic connections and performs optimization of their geometric parameters based on spectral analysis of bending vibrations of the working body. A generalized mathematical model is proposed, which accounts for the nonlinear stiffness characteristics of the supports and inter-section joints, as well as the inertial and dissipative contributions of the transported material. The influence of section length and elastic parameters on the spectrum of natural frequencies and the conditions for the occurrence of dangerous resonant regimes, including higher harmonics of excitation, is analyzed. Criteria for selecting rational geometric parameters aimed at improving operational stability, energy efficiency, and service life of the equipment are substantiated. The obtained results can be applied in the design and modernization of vibrating conveyors for mining, construction, metallurgical, and agro-industrial applications.

Keywords: vibrating conveyor, resonant vibrations, nonlinear elastic connections, spectral analysis, geometric optimization, energy efficiency, bulk material handling, drilling mud.

1. Постановка проблеми. Вібраційні транспортери широко застосовуються в гірничодобувній, нафтовій, будівельній, металургійній, хімічній та агропромисловій галузях для транспортування, дозування та сортування сипких і кускових матеріалів. Зростання вимог до продуктивності, енергоефективності та надійності технологічного обладнання зумовлює необхідність удосконалення конструкцій вібраційних транспортерів і розроблення ефективних методів їх раціонального проектування.

Особливу увагу привертають резонансні вібраційні транспортери, які забезпечують високі амплітуди коливань за відносно малих енерговитрат. Однак їх експлуатація пов'язана з підвищеною чутливістю до зміни маси транспортованого матеріалу та ризиком виникнення

небажаних резонансних режимів, що може призводити до зростання динамічних навантажень, зниження довговічності елементів конструкції та порушення стабільності транспортного процесу.

Однією з ключових інженерних задач є визначення раціональних геометричних параметрів резонансних вібраційних транспортерів, насамперед довжини секцій, яка безпосередньо впливає на спектр власних частот вигинних коливань робочого органа. Зі збільшенням довжини транспортуючої поверхні відбувається зниження власних частот, що може спричинити їх зближення з робочою частотою збудження та формування небезпечних динамічних режимів.

Додаткову складність становить наявність нелінійних пружних зв'язків, жорсткісні характеристики яких залежать від амплітуди коливань, що ускладнює аналітичний опис динаміки системи та потребує застосування спеціальних методів лінеаризації і спектрального аналізу. Більшість існуючих методик проектування базується на спрощених лінійних моделях, які не забезпечують достатньої точності оцінювання динамічних характеристик резонансних вібраційних транспортерів.

У зв'язку з цим актуальною є задача розроблення узагальненої математичної моделі резонансного вібраційного транспортера з урахуванням нелінійних пружних зв'язків та оптимізація його геометричних параметрів на основі спектрального аналізу вигинних коливань, що дозволить підвищити енергоефективність, стабільність роботи та довговічність обладнання.

2. Аналіз публікацій по темі дослідження. Питання підвищення ефективності транспортування сипких матеріалів вібраційними транспортерами залишається актуальним у зв'язку з вимогами до енергоощадності, стабільності режимів та довговічності обладнання. У прикладних роботах, присвячених вібраційним транспортно-маніпулюючим конвеєрам для пакувального обладнання, узагальнено конструктивні підходи до формування коливального руху робочих органів, а також показано роль кінематичних та силових параметрів у забезпеченні технологічної надійності систем переміщення виробів і матеріалів [1]. Важливий внесок у розвиток теоретичних основ високоефективних коливальних систем зроблено в монографічних дослідженнях, де систематизовано міжрезонансні режими, принципи керування коливаннями та підходи до підвищення енергоефективності вібраційних машин з електромагнітним приводом, що може бути використано як методологічна база при аналізі резонансних транспортних систем [2].

У вітчизняних публікаціях останніх років акцентовано увагу на оптимізації конструкцій вібраційних транспортерів для сучасної промисловості, зокрема на впливі конструктивних рішень на продуктивність, енерговитрати та експлуатаційну надійність при транспортуванні сипких матеріалів [3]. Оглядово-аналітичні дослідження конструкцій і практики застосування вібраційних конвеєрів узагальнюють типові схеми приводів, підвісок і робочих органів, а також підкреслюють проблематику стабілізації амплітуди та зменшення динамічних навантажень у широкому діапазоні режимів роботи [4]. Додаткові приклади інженерних рішень і модульних виконань вібраційних конвеєрів, орієнтованих на багатофункціональне транспортування та інтеграцію у виробничі лінії, висвітлені в матеріалах виробників, що демонструють прикладні підходи до компонування та експлуатаційних переваг промислових систем [5–7].

Окремим напрямом сучасних досліджень є аналіз нелінійної динаміки коливальних систем і явищ самосинхронізації. У роботах з теорії синхронізації двох збуджувачів у нелінійних вібраційних системах показано, що наявність нелінійностей та множинних резонансних типів істотно впливає на встановлення стійких режимів і на розподіл енергії в системі, що є принципово важливим для резонансних транспортерів із нелінійними пружними зв'язками [8]. Дослідження впливу конструктивних параметрів на рух лотка та самосинхронізацію інерційних вібраторів деталізують роль геометрії, жорсткісних характеристик підвісок і параметрів збудження у формуванні траєкторій коливань та робочих режимів транспортера [9]. Також відомі підходи до вирівнювання транспортної швидкості у двонапрямних вібраційних конвеєрах, що підкреслює необхідність комплексного врахування

динамічних характеристик робочого органа для забезпечення заданої продуктивності та керованості процесу транспортування [10].

3. Мета і завдання дослідження. Метою статті є оптимізація геометричних параметрів резонансних вібраційних транспортерів з нелінійними пружними зв'язками на основі спектрального аналізу вигинних коливань робочого органа з метою підвищення стабільності роботи, енергоефективності та довговічності обладнання.

Для досягнення поставленої мети у роботі розглянуто фізичну та розрахункову моделі резонансного вібраційного транспортера, проаналізовано вплив нелінійних пружних зв'язків на динамічні характеристики системи.

Завданнями дослідження є розробка узагальненої математичної моделі коливань робочого органа вібраційного транспортера з урахуванням нелінійних пружних зв'язків, формування методики лінеаризації жорсткісних характеристик і визначення приведених параметрів системи, аналіз впливу довжини робочого органа на спектр власних частот та обґрунтування раціональних геометричних параметрів секцій транспортера з метою уникнення небезпечних резонансних режимів і підвищення стабільності його роботи.

4. Дослідження динамічних характеристик вібраційного транспортера з нелінійними пружними зв'язками.

Для дослідження динамічних характеристик вібраційного транспортера з нелінійними пружними зв'язками розглянемо узагальнену конструктивну схему секціонованого віброконвеєра, робочий орган якого складається з уніфікованих лінійних секцій, з'єднаних між собою шарнірними вузлами. Приводна секція може розміщуватися в довільному положенні, що забезпечує гнучке компонування транспортної системи залежно від технологічних вимог. Опорні вузли виконані у вигляді пружних віброізоляторів, а між робочими органами встановлені основні пружні зв'язки з нелінійною жорсткісною характеристикою. Збудження коливань здійснюється ексцентриковими віброзбуджувачами, завдяки чому реалізується режим резонансної роботи системи.

З огляду на симетрію коливальної системи та з метою спрощення аналізу розглядаємо вигинні коливання одного робочого органа, які описуються моделлю пружної балки постійного поперечного перерізу зі вільними кінцями та рівномірно розподіленою по довжині масою. Робочий орган взаємодіє з основою через систему нелінійних пружних елементів, жорсткісні характеристики яких залежать від амплітуди коливань і зумовлюють виникнення вищих гармонік у спектрі коливального процесу. На рисунку 1. показано лабораторний вібраційний транспортер який використовується для транспортування насипних вантажів.



Рис. 1. Вібраційний транспортер

Fig. 1. Vibrating conveyor

З урахуванням підходів до математичного опису вібромашин, що передбачають введення транспортованого середовища (приведена маса та приведений опір) і

представлення робочого органа як розподіленої системи, робочий орган моделюється пружною балкою (або тонкостінним коробом) постійного перерізу довжини l з рівномірно розподіленою масою m та жорсткістю EI . Вплив матеріалу враховується через приведені доданки m_{eq} (інерційний внесок середовища) та c_{eq} (дисипативний внесок), що залежать від заповнення, гранулометрії та режиму переміщення. У такому разі рівняння вимушуючих коливань записується у вигляді:

$$EI \frac{\partial^4 y(x,t)}{\partial x^4} + (m + m_{eq}) \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} + c_{eq} \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} + q_{nl}(y(x,t)) = p(x,t) \quad (1)$$

де $y(x,t)$ – прогин робочого органа в перерізі з координатою x у момент часу t ; $q_{nl}(y)$ – нелінійна узагальнена реакція пружних зв'язків (підвісок/опор/міжсекційних вузлів); $p(x,t)$ – розподілене збудження, пов'язане з дією віброзбуджувача та передачею зусиль через силову схему

Такий запис є зручним для подальшого переходу до частотної області та аналізу спектра форм коливань, що критично для обґрунтування раціональної довжини секцій

Нелінійність пружних зв'язків (наявність зазорів, контактних ділянок, гумометалевих елементів) зумовлює залежність еквівалентної жорсткості від амплітуди:

$$q_{nl}(y) = k_1 y + k_3 y^3 + \dots \quad (2)$$

або в інженерній формі через еквівалентну (лінійаризовану) жорсткість $k_{eq}(A)$, визначену методом гармонічного балансу, що є типовим шляхом переходу від нелінійної моделі до частотного аналізу. Тоді:

$$q_{nl}(y) \approx k_{eq}(A)y \quad (3)$$

$$k_{eq} = k_{eq}\left(\frac{A}{e}\right) \quad (4)$$

де A — амплітуда коливань, e — характерний зазор/параметр нелінійності (як у моделях із контактною роботою пружних елементів).

Оскільки нелінійна система формує полігармонійний відгук, часовий закон коливань доцільно подавати як ряд Фур'є:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^N y_n(x) \sin(n\omega t + \varphi_n) \quad (5)$$

де складові $n \geq 2$ (вищі гармоніки) стають суттєвими при зростанні A/e або при роботі поблизу параметричних резонансів. Для інженерних оцінок використовується підхід «домінування першої гармоніки» з уточненням внеску $2\omega, 3\omega$ у критичних режимах (зокрема для оцінки динамічних напружень і перевантажень на стиках секцій).

Частотна задача та залежність спектра від геометрії та довжини секції для першої гармоніки записується наступним рівнянням (6) з якого отримуємо крайову задачу (7)

$$y(x,t) = Y(x) \sin(\omega t) \quad (6)$$

$$EIY^{(4)}(x) - (m + m_{eq})\omega^2 Y(x) + k_{eq}(A)Y(x) = P(x) \quad (7)$$

де $P(x)$ – еквівалентний розподіл збуджуючих дій. Для оцінки власних частот (без зовнішнього збудження) маємо:

$$EIY^{(4)}(x) + k_{eq}(A)Y(x) = (m + m_{eq})\omega_k^2 Y(x) \quad (8)$$

Звідси випливає принципово важливий результат для оптимізації: частоти ω_k є функцією довжини секції l , жорсткості EI , приведених параметрів середовища (m_{eq}, c_{eq}) та рівня нелінійності $k_{eq}(A)$. Тобто:

$$\omega_k = \omega_k(l, EI, m + m_{eq}, k_{eq}(A)) \quad (9)$$

Це створює формальну основу для обґрунтування раціональної довжини секцій як такої, що забезпечує частотний «запас» відносно робочої частоти:

$$|\omega - \omega_k(l)| \geq \Delta \quad (10)$$

де Δ – припустима відстань від небезпечних зон резонансів у практиці проектування часто задається у відсотках від робочої частоти.

У межах удосконаленої моделі вибір геометричних параметрів (насамперед l , а також кроку опор і компоновки секцій) формулюється як задача оптимізації з двома групами критеріїв:

- динамічна безпека (віддаленість від резонансів з урахуванням вищих гармонік),
- енергоефективність (зменшення витрат потужності при забезпеченні потрібної транспортної швидкості).

У загальному вигляді:

$$l_{\min} = \arg \min_l P(l, A, \omega) \quad (11)$$

За умови

$$|\omega - \omega_k(l)| \geq \Delta, \quad |n\omega - \omega_j(l)| \geq \Delta_n, \quad n = 2, 3, \dots y(x, t) = \sum_{n=1}^N y_n(x) \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

де додаткові обмеження для $n\omega$ враховують можливість небезпечних “попадань” вищих гармонік у власні частоти системи (що особливо критично для довгих секцій і конструкцій з вираженою нелінійністю зв’язків). Саме включення цих умов є однією з ключових відмінностей удосконаленої постановки від класичного частотного підходу.

5. Висновки

У роботі розглянуто задачу оптимізації геометричних параметрів резонансних вібраційних транспортерів з нелінійними пружними зв’язками на основі спектрального аналізу вигинних коливань робочого органа. Запропоновано узагальнену математичну модель, яка враховує нелінійність жорсткісних характеристик опор та міжсекційних з’єднань, а також інерційний і дисипативний внесок транспортованого середовища. Це дозволило більш адекватно описати реальні динамічні процеси, характерні для резонансних режимів роботи.

Отримано аналітичні залежності власних частот від довжини секцій, жорсткості пружних зв’язків та амплітуди коливань, що дало змогу встановити закономірності впливу геометричних параметрів на спектральні характеристики системи. Показано, що зі збільшенням довжини робочого органа відбувається зниження власних частот і зростає ймовірність зближення з робочою частотою та її вищими гармоніками, що може призводити до виникнення небезпечних резонансних режимів і зростання динамічних навантажень.

Запропоновано критерій вибору раціональної довжини секцій, який ґрунтується на забезпеченні частотного запасу відносно основної та вищих гармонік збудження, а також на мінімізації енергоспоживання при збереженні заданої продуктивності транспортера. Сформульовано задачу оптимізації геометричних параметрів з урахуванням умов динамічної безпеки та енергоефективності.

Отримані результати створюють теоретичну основу для інженерного проектування секціонованих резонансних вібраційних транспортерів із підвищеною стабільністю роботи, довговічністю та зниженими енергетичними витратами. Запропонований підхід може бути використаний при розробленні нових конструкцій транспортних систем для гірничодобувної, будівельної, металургійної та агропромислової галузей, а також для модернізації існуючого обладнання.

Список використаних джерел:

1. Корендій, В.М. Вібраційні транспортно-маніпулюючі конвеєри для пакувального обладнання / В.М. Корендій, О.В. Гаврильченко, В.С. Шенбор // Вісник Національного університету «Львівська політехніка». Серія: Оптимізація виробничих процесів і технічний контроль у машинобудуванні та приладобудуванні. – 2018. – № 891. – С. 35 – 41.

2. Ланець О.С. Високоєфективні міжрезонансні вібраційні машини з електромагнітним приводом (Теоретичні основи та практика створення): Монографія. – Львів: Вид-во Нац. ун-ту “Львівська політехніка”. – 2008. – 324 с.
3. Оптимізація конструкцій вібраційних транспортерів для транспортування сипких матеріалів у сучасній промисловості / І.І. Назаренко, М.М. Нестеренко, Ю.М. Тікан, О.В. Квасневський // Тези 77-ї наукової конференції професорів, викладачів, наукових працівників, аспірантів та студентів (16 травня – 22 травня 2025 р.). – Полтава : Нац. ун-т ім. Ю. Кондратюка, 2025. – Т. 1. – С. 247-249
4. Вібраційні конвеєри, особливості будови та експлуатації / М.М. Нестеренко, Ю.М. Тікан, Т.М. Нестеренко, & А.І. Аніщенко // Техніка будівництва : наук.-техн. журн. – К.: КНУБА, 2025. – Вип. 42. – С. 92–101.– <https://doi.org/10.32347/tb.2025-42.0510>
5. <https://bruks-siwertell.com/conveying/vibrating-conveyor> – Vibrating conveyors ensure efficient, multi-functional material handling
6. <https://www.generalkinematics.com/product-category/bulk-processing-solutions/vibrating-conveyors/> – Vibrating Transfer Conveyors
7. <https://vibrotech-eng.com/en/products/vibrating-conveyors/> – Vibrating Conveyors
8. Zhang X, Wen B, Zhao C. Theoretical study on synchronization of two exciters in a nonlinear vibrating system with multiple resonant types. *Nonlinear Dynamics*. 2016 Jul;85(1):141–154.
9. Cieplok, Grzegorz. "Influence of vibratory conveyor design parameters on the trough motion and the self-synchronization of inertial vibrators" *Open Engineering*, vol. 14, no. 1, 2024, pp. 20220434. <https://doi.org/10.1515/eng-2022-0434>
10. Czubak P. Equalization of the transport velocity in a new two-way vibratory conveyor. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, Vol. 11, 2011.

References:

1. Korendii, V. M., Havrylchenko, O. V., & Shenbor, V. S. (2018). Vibratsiini transportno-manipuliuiuchi konveiry dlia pakuvalnoho obladnannia [Vibrational transport-manipulating conveyors for packaging equipment]. *Visnyk Natsionalnoho universytetu "Lvivska politekhniky". Seriya: Optymizatsiia vyrobnychyykh protsesiv i tekhnichnyi kontrol u mashynobuduvanni ta pryladobuduvanni – Bulletin of Lviv Polytechnic National University. Series: Optimization of production processes and technical control in mechanical engineering and instrument engineering*, (891), 35–41.
2. Lanets, O. S. (2008). *Vysokoeffektyvni mizhrezonansni vibratsiini mashyny z elektromahnitnym pryvodom (Teoretychni osnovy ta praktyka stvorennia)* [Highly efficient inter-resonant vibration machines with electromagnetic drive (Theoretical foundations and practical implementation)]. Lviv Polytechnic National University Publishing House.
3. Nazarenko, I. I., Nesterenko, M. M., Tikan, Yu. M., & Kvasnevskiy, O. V. (2025). Optymizatsiia konstruktzii vibratsiinykh transporteriv dlia transportuvannia syvkykh materialiv u suchasnyy promyslovosti [Optimization of vibratory conveyor designs for bulk material transportation in modern industry]. In *Abstracts of the 77th scientific conference of professors, lecturers, researchers, postgraduate students and students (May 16–22, 2025)* (Vol. 1, pp. 247–249). Yuri Kondratyuk Poltava Polytechnic National University.
4. Nesterenko, M. M., Tikan, Yu. M., Nesterenko, T. M., & Anishchenko, A. I. (2025). Vibratsiini konveiry, osoblyvosti budovy ta ekspluatatsii [Vibratory conveyors: Design features and operational characteristics]. *Tekhnika budivnytstva – Construction Engineering*, 42, 92–101. <https://doi.org/10.32347/tb.2025-42.0510>
5. Bruks Siwertell. (2024). *Vibrating conveyors ensure efficient, multi-functional material handling*. <https://bruks-siwertell.com/conveying/vibrating-conveyor>
6. General Kinematics. (2024). *Vibrating transfer conveyors*. <https://www.generalkinematics.com/product-category/bulk-processing-solutions/vibrating-conveyors/>
7. Vibrotech Engineering. (2024). *Vibrating conveyors*. <https://vibrotech-eng.com/en/products/vibrating-conveyors/>
8. Zhang, X., Wen, B., & Zhao, C. (2016). Theoretical study on synchronization of two exciters in a nonlinear vibrating system with multiple resonant types. *Nonlinear Dynamics*, 85(1), 141–154. <https://doi.org/10.1007/s11071-016-2690-7>
9. Cieplok, G. (2024). Influence of vibratory conveyor design parameters on the trough motion and the self-synchronization of inertial vibrators. *Open Engineering*, 14(1), 20220434. <https://doi.org/10.1515/eng-2022-0434>
10. Czubak, P. (2011). Equalization of the transport velocity in a new two-way vibratory conveyor. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*, 11, 573–586.