УДК 621.876
DOI: https://doi.org/10.32347/tb.2024.40.0307

Юрій Човнюк,
кандидат технічних наук,
доцент кафедри міського будівництва,
Київський Національний університет будівництва та архітектури
Повітрофлотський пр., 31, м. Київ, 03037, Україна
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0608-0203
E-mail: ychovnyuk@ukr.net

Петро Чередніченко,
доцент кафедри міського будівництва,
Київський Національний університет будівництва та архітектури
Повітрофлотський пр., 31, м. Київ, 03037, Україна
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7161-661X
E-mail: petro_che@ukr.net

Наталія Шудра,
ст. викладач кафедри інженерної геодезії,
Київський Національний університет будівництва та архітектури
Повітрофлотський пр., 31, м. Київ, 03037, Україна
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5416-7680
E-mail: Shudra_n@ukr.net

Артем Лютіков,
асистент кафедри міського будівництва,
Київський Національний університет будівництва та архітектури
Повітрофлотський пр., 31, м. Київ, 03037, Україна
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6866-9857
E-mail: liutikov.aa@knuba.edu.ua

ОПТИМІЗАЦІЯ ПРОЦЕСІВ ПЕРЕМІЩЕННЯ І РОЗГОНУ ВАНТАЖНОГО ВІЗКА МОСТОВОГО КРАНА У РЕЖИМІ ГАСІННЯ НЕКЕРОВАНИХ КОЛИВАНЬ ВАНТАЖУ

АНОТАЦІЯ. *У роботі проведене моделювання та оптимізація процесів переміщення і розгону вантажного візка мостового крана у режимі гасіння некерованих коливань вантажу. Для динамічної системи плоского маятника із затуханням коливань, яка описує коливання вантажу мостового крана на гнучкому канатному підвісі у окремій вертикальній площині, запропоновано використовувати сплайни по часу третього порядку, які моделюють рух та прискорення точки підвісу вантажу у горизонтальному напрямку руху вантажного візка.*

Для з'ясування часової залежності кута відхилення вантажного крана від гравітаційної вертикалі запропоновано використати методи класичного варіаційного числення (рівняння Ейлера-Пуассона), котрі дозволяють оптимізувати (мінімізувати) величину вказаного кута у процесі розгону вантажного візка з вантажем, підвішеним на канаті мостового крана.
Отриманий аналітичний розв'язок задачі гасіння залишкових некерованих коливань вантажу мостового крана, які зазвичай виникають після повного розгону чи гальмування точки підвісу вантажу на вантажному візку. Для виведення залежностей використаний аналітичний підхід задля розрахунку величини кута відхилення вантажного канату мостового крана від гравітаційної вертикалі у залежності від прискорення і переміщення точки підвісу вантажу.

Розглянута проблема розхитування вантажу, який переміщується мостовим краном, вирішена новим способом, котрий дозволяє повністю уникнути маятникових просторових коливань вантажу на канатному підвісі. При цьому використаний математичний апарат лінійної алгебри (правило Крамера, зокрема), який дозволяє аналітичним шляхом встановити закон руху у часі канату з вантажем, кут відхилення котрого від вертикалі приймає мінімальні значення у процесі розгону вантажного візка.

Ключові слова: *мостовий кран, траєкторія вантажу, гасіння коливань, розхитування, оптимізація, переміщення, розгін, вантажний візок, канат.*

OPTIMIZATION OF THE PROCESSES OF MOVEMENT AND ACCELERATION OF THE OVERHEAD CRANE TROLLEY IN THE MODE OF DAMPING UNCONTROLLED LOAD OSCILLATIONS

ABSTRACT. *The paper deals with the modeling and optimization of the processes of movement and acceleration of a bridge crane trolley in the mode of damping uncontrolled oscillations of the load. For the dynamic system of a flat pendulum with vibration damping, which describes the oscillations of a bridge crane load on a flexible rope suspension in a separate vertical plane, it is proposed to use third-order time splines that model the motion and acceleration of the load suspension point in the horizontal direction of the trolley's movement.*

To determine the time dependence of the angle of deviation of the crane from the gravitational vertical, it is proposed to use the methods of classical calculus of variations (Euler-Poisson equation), which allow optimizing (minimizing) the value of this angle in the process of accelerating a trolley with a load suspended from the ropes of an overhead crane.

An analytical solution to the problem of damping residual uncontrollable oscillations of the overhead crane load, which usually occur after full acceleration or braking of the load suspension point on the trolley, is obtained. To derive the dependencies, an analytical approach was used to calculate the value of the angle of deviation of the overhead crane's cargo rope from the gravitational vertical, depending on the acceleration and displacement of the load suspension point.

The problem of loosening of a load moved by an overhead crane is considered and solved in a new way that allows to completely avoiding pendulum spatial oscillations of the load on a rope suspension. The mathematical apparatus of linear algebra (Kramer's rule, in particular) is used, which allows us to establish analytically the law of time motion of a rope with a load, the angle of deviation of which from the vertical takes minimum values in the process of acceleration of the cargo trolley.

Keywords: *overhead crane, load trajectory, vibration damping, sway, optimization, movement, acceleration, trolley, rope.*

1. Постановка проблеми. Переміщення вантажів мостовими кранами (МК) з нежорстким канатним підвісом вантажу викликає маятникові коливання вантажу, у яких присутня некерована компонента. Такі коливання суттєво збільшують тривалість циклу МК, знижують продуктивність та безпеку робіт [1-3]. Зростає небезпека зіткнень вантажу з об'єктами, присутніми у зоні переміщень, при цьому імовірними є і пошкодження самого вантажу, інших об'єктів й власне МК. У зв'язку з цим доцільно повністю згасити некеровану компоненту маятникових коливань вантажу як при його переміщенні, так і при досягненні вантажем цільової точки [4]. Особливо це актуально при переміщенні небезпечних вантажів: ємностей з рідким металом (у металургійних цехах), горючими рідинами та ін.

Слід зазначити, що переміщення вантажів на гнучкому підвісі канатного типу, яке здійснюють, зокрема, опорні на одну або на дві балки мостові крани загального призначення, доцільно проводити саме у режимі гасіння вказаних вище некерованих маятникових коливань вантажу, і задля повного гасіння залишкової компоненти маятникових коливань вантажу при його переміщенні у окремій площині можливим є переміщення точки підвісу вантажу (вантажний візок, або міст МК) по заданій аналітично часовій залежності (траєкторії). Подібне переміщення, яке можливе за використання мехатронних систем управління рухом вантажного візка МК, не тільки знищить залишкову некеровану компоненту коливань, але і забезпечить заздалегідь визначену часову залежність кута відхилення вантажного канату МК від вертикалі.

2. Аналіз останніх джерел досліджень і публікацій. Відомі методи синтезу траєкторії точки підвісу [3, 5-12] мають загальний недолік у вигляді порівняно великої похибки реалізації як кута відхилення вантажного канату МК від вертикалі, так і лінійних координат вантажу, який переміщується. Як правило, кут відхилення вантажного канату МК від вертикалі не відслідковується і не контролюється, а час переміщення вантажу зростає.
Нормовані керовані відхилення вантажного канату МК від гравітаційної вертикалі при переміщенні вантажів необхідні. Надати вантажу горизонтального прискорення без відхилень вантажного канату від вертикалі неможливо! Але при цьому доцільно, щоб вказані відхилення були короткочасними й не перевищували заданих меж.

Відомі аналітичні залежності оптимального та квазіоптимального режимів керування маятниковою системою з рухливою точкою підвісу для задачі найшвидшого розгону (гальмування) з гасінням коливань [4]. На швидкість і прискорення точки підвісу накладені обмеження. Недолік відомого способу: розглядаються лише малі коливання маятника навколо положення рівноваги, відсутність певного (граничного) значення кута відхилення вантажного каната МК від вертикалі. Оптимальне управління носить релейний характер: прискорення точки підвісу приймає лише граничні значення. Гасіння коливань маятника відбувається не на усьому інтервалі часу робочого циклу, а лише у кінці розгону чи переміщення системи [4].

Відомі роботи по розв'язку задачі швидкодії для нелінійного маятника (приведення нелінійного маятника у стійке положення рівноваги) [13, 14]. Однак розглядається система з нерухомою точкою підвісу й прикладеним по кутовій координаті маятника моментом. Крім того, у відомих роботах не враховується дисипація енергії. Рівняння маятника з фіксованою точкою підвісу не підходять для опису розглянутої у даній роботі задачі як по структурі, так і за параметрами, які у них входять.

При розв'язуванні задачі гасіння коливань вантажів на канатному підвісі з рухливою верхньою точкою підвісу (з рухливою основою) знаходять застосування такі сучасні підходи, як застосування ПД – та ПІД – регуляторів [5-9], апарату нечіткої логіки [3-10] та shaping-алгоритмів [11, 12]. У відповідності з ними здійснюється управління траєкторією верхньої точки підвісу вантажу.

У роботах [15, 16] розроблений алгоритм, котрий при заданих обмеженнях у виді максимальних швидкості й прискорення рухомої точки підвісу вантажу на МК (вантажного візка) синтезує неперервне (безступінчасте, нерелейне) управління точкою підвісу за допомогою частотно-регульованих приводів МК. Такими приводами оснащена низка МК, які виготовляються зараз. Алгоритм також враховує можливість великих кутів відхилення вантажного каната від гравітаційної вертикалі, що дозволяє підвищити швидкість переміщення й продуктивність функціонування МК. На граничне значення відхилення кута вантажного канату у процесі розгону і гальмування МК при цьому накладені жорсткі обмеження у вигляді його точного досягнення. Виконання цієї умови, на думку авторів [15, 16], суттєво підвищує продуктивність МК із урахуванням досягнення максимальних значень швидкості та прискорення рухливої точки підвісу. Проте даний підхід і його реалізація спряжені зі значними труднощами й вимагають наявності складного електронно-механічного обладнання. Крім того, у наведеному алгоритмі, на думку авторів даного дослідження, порушені причинно-наслідкові зв'язки у даній технічній системі, оскільки первісною є залежність у часі кута відхилення канату з вантажем від гравітаційної вертикалі, яка задається наперед, а рух вантажного візка регулюється цієї залежністю (кута відхилення канату від вертикалі у часі), хоча за логікою повинно бути навпаки.

Ця несумісність ліквідована у даному дослідженні. Крім того, знайдена оптимальна траєкторія руху вантажного візка, за якою прискорення цього руху мінімізоване у процесі розгону вантажного візка до сталого, нормативного значення швидкості руху. Моделювання, аналіз та оптимізація руху вантажного візка МК, який спричинює, у свою чергу, мінімальні відхилення вантажу від вертикалі і знижує суттєво виникаючі маятникові коливання у МК, побудовані на основі результатів, одержаних у роботах [17-20].

3. Мета роботи. Мета роботи полягає у обґрунтуванні фізико-механічної та математичної моделей, які адекватно описують та оптимізують процеси переміщення і розгону вантажного візка мостового крана, котрий функціонує у режимі гасіння некерованих залишкових коливань вантажу. Задля досягнення мети використаний математичний апарат класичного варіаційного числення, математичної фізики та теорії звичайних диференціальних рівнянь. Встановлення закономірностей руху вантажного візка засноване на сплайн-апроксимації у часі, а функціональної залежності від часу кута відхилення канату МК з вантажем – на апараті лінійної алгебри та методах розв'язку неоднорідних диференціальних рівнянь високого порядку лінійного типу.

4. Матеріали та методи.

1. *Формулювання задачі.* У даному дослідженні прийнята математична модель плоского маятника з рухомою точкою підвісу, яку всебічно аналізували автори [15, 16]. У процесі обчислювальних (чисельних) експериментів на ПЕОМ було встановлено, що для малих значень кутів відхилення канатів з вантажем (<5^0) просторові коливання вантажу можуть з порівняно невеликою похибкою подані як суперпозиція коливань у двох взаємно перпендикулярних площинах.

Як і у цитованих вище роботах, для системи плоского маятника були прийняті позначення: m – маса вантажу, кг; L – довжина вантажного канату МК від рухомої точки підвісу на вантажному візку (центр блоку роликів поліспаста) до центру мас вантажу, м; b – приведений до кутової координати коефіцієнт в'язкого тертя, який задає міру (рівень) дисипації енергії, Н·м·с/рад; $q, \dot{q}, \ddot{q}$ – кут відхилення вантажного канату МК від гравітаційної вертикалі і його перші дві похідні по часу, відповідно рад, рад/с, рад/с^2; g=9,81 м/с^2 – прискорення вільного падіння; $\ddot{x}$ – лінійне прискорення точки підвісу вантажу у горизонтальному напрямку руху вантажного візка, м/с^2.

Систему плоского маятника у «великих» змінних (припускаються відхилення вантажного канату понад (10…15)^o), описує відоме нелінійне диференціальне рівняння другого порядку [21-24]:

$$\ddot{q} + (2b/m)\cdot\dot{q} + (g/L)\cdot\sin q + (\ddot{x}/L)\cdot\cos q = 0. \tag{1}$$

При дослідженнях були прийняті припущення щодо постійної довжини вантажного канату L у процесі переміщення вантажу, про безступінчастий характер регулювання швидкості $\dot{x}$ й прискорення $\ddot{x}$ розгону та гальмування точки підвісу вантажу (вантажного візка МК, що забезпечує мехатронна система управління частотою обертання приводу) у горизонтальному напрямку й про надто малий вплив маси вантажу, який переміщується, та рухомих ланок МК на керовані параметри швидкості $\dot{x}$ та прискорення $\ddot{x}$ точки підвісу.

У подальшому розглядається елементарний такт переміщення. Вантаж зі стану спокою на вертикальному канатному підвісі переміщується МК на деяку задану відстань за певний термін часу. Після переміщення (у момент часу τ_p – тривалість розгону) вантаж також знаходиться у стані, близькому до стану спокою ($\ddot{x}\big|_{t=\tau_p} = 0; q\big|_{t=\tau_p} = 0; \dot{q}\big|_{t=\tau_p} = 0$), тобто у стані відсутності залишкових коливань. Отже, у даній задачі присутні термінальні умови як для $x(t)$, так і для $q(t)$.

У даному дослідженні використана математична модель плоского маятника для малих кутів відхилення вантажного канату ($sinq \approx q,\ cosq \approx 1$) задля отримання аналітичних виразів $x(t),\ q(t)$, що задовольняють певним критеріям якості руху системи «вантажний візок –канат – вантаж» МК. Тому після лінеаризації диференціальне рівняння другого порядку для вказаного вище плоского маятника приймає наступний вид [21-24]:

$$\ddot{q} + \ddot{x}/L + (2b/m)\cdot\dot{q} + g\cdot q/L = 0. \tag{2}$$

2. *Оптимізація режиму руху системи «вантажний візок – канат – вантаж» мостового крану у період його розгону* $t \in [0, \tau_p]$.

З рівняння (2) легко визначити наступне співвідношення:

$$\ddot{x} = -L\cdot(\ddot{q} + 2b\dot{q}/m + g\cdot q/L). \tag{3}$$

Встановимо умови, за яких у період розгону системи ($t \in [0, \tau_p]$) виконується наступний критерій якості цього руху:

$$I = \left\{ \frac{1}{\tau_p} \cdot \int_0^{\tau_p} (\ddot{x})^2 dt \right\}^{1/2} \Rightarrow \min, \tag{4}$$

тобто мінімізація інерційних сил, діючих у даній системі у період її розгону. Необхідною умовою реалізації критерію (4) є рівняння Ейлера-Пуассона:

$$x^{(IV)} = 0. \tag{5}$$

Розв'язок рівняння (5) шукаємо у наступному виді:

$$x(t) = A_0 + A_1 \cdot t + A_2 \cdot t^2 + A_3 \cdot t^3. \tag{6}$$

Для знаходження невідомих констант A_0, A_1, A_2, A_3 використаємо наступні термінальні умови:

$$x\big|_{t=0} = 0; \dot{x}\big|_{t=0} = 0; \ddot{x}\big|_{t=0} = a; \ddot{x}\big|_{t=\tau_p} = 0, \tag{7}$$

де: a – прискорення на початку розгону вантажного візка МК. Підставляючи (6) у всі умови (7), матимемо:

$$A_0 = 0; \quad A_1 = 0; \quad A_2 = a/2; \quad A_3 = -a/(6\tau_p). \tag{8}$$

Тому вираз (6) набуває вигляду:

$$x(t) = \frac{a}{2} \cdot t^2 - \frac{a}{6\tau_p} \cdot t^3. \tag{9}$$

У подальшому, для аналізу закону руху канату з вантажем $q(t)$ знаходимо:

$$\dddot{x}(t) = -a/\tau_p. \tag{10}$$

Використовуючи рівняння (2), визначимо величину $q(t)$ для довільного моменту часу $t \in [0, \tau_p]$:

$$q = \frac{L}{g} \cdot \left\{ -\ddot{x} \cdot L^{-1} - \ddot{q} - 2b\dot{q}/m \right\}. \tag{11}$$

Визначимо, за відомого закону $x(t)$ (9), за яких умов для $q(t)$ виконується наступний критерій якості руху системи:

$$I_1 = \left\{ \frac{1}{\tau_p} \cdot \int_0^{\tau_p} q^2(t) dt \right\}^{1/2} \Rightarrow \min, \tag{12}$$

тобто середнє квадратичне відхилення кута $q(t)$ від гравітаційної вертикалі за період розгону вантажного візка за законом (9) набуває мінімальних значень.

Задля реалізації критерію якості руху I_1 (12) необхідною умовою є рівняння Ейлера-Пуассона (причому $x(t)$ задана функція часу – (9)):

$$q^{(IV)} - (4b^2/m^2) \cdot \ddot{q} = -(2b \cdot a)/(mL \cdot \tau_p). \tag{13}$$

Характеристичне рівняння для (13) з правою частиною, яка дорівнює нулю (тобто для однорідного рівняння, яке випливає з (13)) набуває виду:

$$\lambda^4 - (4b^2)/(m^2) \cdot \lambda^2 = 0. \tag{14}$$

Отже, корені (14) набувають наступних значень:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0;\ \ \lambda_3 = 2b/m;\ \ \lambda_4 = -2b/m. \tag{15}$$

Частинний розв'язок (13) шукаємо у вигляді:

$$q_{част.} = B \cdot t^2. \tag{16}$$

Підставляючи (16) у (13), легко знаходимо:

$$B = (a \cdot m)/(4L \cdot b \cdot \tau_p). \tag{17}$$

Тому загальний розв'язок (13) можна подати наступним чином:

$$q(t) = C_0 + C_1 \cdot t + C_2 \cdot \exp\left\{\frac{2b}{m} \cdot t\right\} + C_3 \cdot \exp\left\{-\frac{2b}{m} \cdot t\right\} + \frac{a \cdot m \cdot t^2}{4L \cdot b \cdot \tau_p}. \tag{18}$$

Для знаходження невизначених констант C_0, C_1, C_2, C_3 використаємо наступні термінальні умови для $q(t)$:

$$q\big|_{t=0};\ \ \dot{q}\big|_{t=0} = 0;\ \ q\big|_{t=\tau_p} = 0;\ \ \dot{q}\big|_{t=\tau_p} = 0. \tag{19}$$

Підставляючи (18) в умови (19), знаходимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь для знаходження констант C_0, C_1, C_2, C_3 наступного виду:

$$\begin{cases} C_0 + C_2 + C_3 = 0; \\ C_1 + \frac{2b}{m} \cdot C_2 - \frac{2b}{m} \cdot C_3 = 0; \\ C_0 + C_1 \cdot \tau_p + C_2 \cdot \exp\left\{\frac{2b}{m} \cdot \tau_p\right\} + C_3 \cdot \exp\left\{-\frac{2b}{m} \cdot \tau_p\right\} + \frac{a \cdot m \cdot \tau_p}{4L \cdot b} = 0; \\ C_1 + \frac{2b}{m} \cdot C_2 \cdot \exp\left\{\frac{2b}{m} \cdot \tau_p\right\} - \frac{2b}{m} \cdot C_3 \cdot \exp\left\{-\frac{2b}{m} \cdot \tau_p\right\} + \frac{a \cdot m}{2L \cdot b} = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Лінійну неоднорідну систему рівнянь (20) для знаходження коефіцієнтів C_0, C_1, C_2, C_3 легко розв'язати за допомогою стандартної процедури лінійної алгебри (правило Крамера). У результаті для коефіцієнтів C_0, C_1, C_2, C_3 у (18) матимемо:

$$\begin{cases} \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}; a_{11} = 1; a_{21} = 0; a_{31} = 1; a_{41} = 0; a_{12} = 0; a_{22} = 1; a_{32} = \tau_p; a_{42} = 1; a_{13} = 1; \\ a_{23} = \frac{2b}{m}; a_{33} = \exp\left\{\frac{2b}{m} \cdot \tau_p\right\}; a_{43} = \left(\frac{2b}{m} \cdot \tau_p\right); a_{14} = 1; a_{24} = -\frac{2b}{m}; a_{34} = \exp\left\{-\frac{2b}{m} \cdot \tau_p\right\}; a_{44} = \left(-\frac{2b}{m}\right) \cdot \\ \cdot \exp\left\{-\frac{2b}{m} \cdot \tau_p\right\}. \\ b_1 = 0; b_2 = 0; b_3 = -\frac{am\tau_p}{4bL}; b_4 = -\frac{am}{2Lb}. \end{cases} \tag{21}$$

$$C_0 = \frac{\Delta C_0}{\Delta}; C_1 = \frac{\Delta C_1}{\Delta}; C_2 = \frac{\Delta C_2}{\Delta}; C_3 = \frac{\Delta C_3}{\Delta}, \tag{22}$$

де значення $\Delta C_0, \Delta C_1, \Delta C_2, \Delta C_3$ можна знайти зі співвідношень (23).

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta C_0 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ b_4 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}; \ \Delta C_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & b_4 & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}; \ \Delta C_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & b_3 & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & b_4 & a_{44} \end{vmatrix}; \\ \Delta C_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & b_4 \end{vmatrix}. \end{array}\right. \quad (23)$$

Зазначимо, що знайдений аналітичний вираз для $q(t)$ зі співвідношень (18)-(23) задовольняє критеріям якості руху системи I (4) та I_1 (12) й практично елімінує залишкові некеровані маятникові коливання вантажу на канаті МК.

5. Висновки:

1. Обґрунтована фізико-механічна та математична моделі руху системи «вантажний візок – канат – вантаж» МК (мостового крана).

2. Для вищевказаної моделі руху встановлені закони руху вантажного візка і кута відхилення від вертикалі канату з вантажем МК, які мінімізують ці відхилення від гравітаційної вертикалі, знижують небажані некеровані залишкові маятникові коливання вантажу МК. При цьому мінімізовані й сили інерції вантажного візка, які виникають у ньому у період його розгону, при його прямуванні до усталених параметрів руху (тобто руху вантажного візка з постійною нормативною швидкістю після закінчення процесу розгону).

3. Отримані у роботі результати можуть у подальшому слугувати для уточнення і вдосконалення існуючих інженерних методів розрахунку кінематично-силових параметрів руху механізмів підйому і транспортування вантажів мостовими кранами, а також крановими системами інших типів, як на стадії проектування подібних складних технічних систем, так і у режимах їх реальної експлуатації.

Список використаних джерел:

1. Ridout A.J. Anti-swing control of the overhead crane using linear feedback. *Journal of Electrical and Electronics Engineering*. 1989. Vol.9. No. 1/2. P. 17-26.
2. Omar H.M. Control of gantry and tower cranes: PhD Dissertation. Virginia Polytechnic Institute and State University. Blacksburg, Virginia. 2003. 100 p.
3. Korytov M., Shcherbakov V., Volf E. Impact sigmoidal cargo movement paths on the efficiency of bridge cranes. *International Journal of Mechanics and Control*. 2015. Vol. 16. No. 2. P. 3-8.
4. Shcherbakov V., etc. The reduction of errors of bridge crane loads movements by means of optimization of the spatial trajectory site. *Applied Mechanics and Materials*. 2015. Vol. 811. P. 99-103.
5. Shcherbakov V., etc. Mathematical modeling of process moving cargo by overhead crane. *Applied Mechanics and Materials*. 2014. Vols. 701-702. P. 715-720.
6. Kim Y.S., etc. A new vision-sensorless anti-sway control system for container cranes. *Industry Applications Conference*. 2003. Vol. 1. P. 262-269.
7. Blackburn D., etc. Command Shaping for Non-linear Crane Dynamics. *Journal of Vibration and Control*. 2010. No.16. P. 477-501.
8. Singer N., Singhose W., Seering W. Comparison of filtering methods for reducing residual vibration. *European Journal of Control*. 1999. No. 5. P. 208-218.
9. Reshmin S.A., Chernous'ko F.L. A time-optimal control synthesis for a nonlinear pendulum. *Journal of Computer and Systems Sciences International*. 2007. Vol. 46. No.1. P. 9-18.

10. Almuzara G.J.L., Flugge-Lots I. Minimum time control of a nonlinear system. *Journal of Differential Equations.* 1968. Vol. 4. No.1. P. 12-39.
11. Ловейкін В.С., Ромасевич Ю.О., Човнюк Ю.В., Кадикало І.О. Динаміка й оптимізація підйомно-транспортних машин. К.: ЦП «Компрінт», 2019. 292 с.
12. Ловейкін В.С., Човнюк Ю.В., Діктерук М.Г., Пастушенко С.І. Моделювання динаміки механізмів вантажопідйомних машин. К. Миколаїв: РВВ МДАУ, 2004. 286 с.
13. Ловейкін В.С., Човнюк Ю.В., Ромасевич Ю.О. Застосування методів варіаційного числення в задачах оптимального управління вантажопідйомними машинами сільськогосподарського призначення. *Підйомно-транспортна техніка*. 2010. № 2. С. 3-15.

References:

1. Ridout A.J. Anti-swing control of the overhead crane using linear feedback. Journal of Electrical and Electronics Engineering. 1989. Vol.9. No. 1/2. P. 17-26. {in English}
2. Omar H.M. Control of gantry and tower cranes: PhD Dissertation. Virginia Polytechnic Institute and State University. Blacksburg, Virginia. 2003. 100 p. {in English}
3. Korytov M., Shcherbakov V., Volf E. Impact sigmoidal cargo movement paths on the efficiency of bridge cranes. International Journal of Mechanics and Control. 2015. Vol. 16. No. 2. P. 3-8. {in English}
4. Shcherbakov V., etc. The reduction of errors of bridge crane loads movements by means of optimization of the spatial trajectory site. Applied Mechanics and Materials. 2015. Vol. 811. P. 99-103. {in English}
5. Shcherbakov V., etc. Mathematical modeling of process moving cargo by overhead crane. Applied Mechanics and Materials. 2014. Vols. 701-702. P. 715-720. {in English}
6. Kim Y.S., etc. A new vision-sensorless anti-sway control system for container cranes. Industry Applications Conference. 2003. Vol. 1. P. 262-269. {in English}
7. Blackburn D., etc. Command Shaping for Non-linear Crane Dynamics. Journal of Vibration and Control. 2010. No.16. P. 477-501. {in English}
8. Singer N., Singhose W., Seering W. Comparison of filtering methods for reducing residual vibration. European Journal of Control. 1999. No. 5. P. 208-218. {in English}
9. Reshmin S.A., Chernousko F.L. A time-optimal control synthesis for a nonlinear pendulum. Journal of Computer and Systems Sciences International. 2007. Vol. 46. No.1. P. 9-18. {in English}
10. Almuzara G.J.L., Flugge-Lots I. Minimum time control of a nonlinear system. Journal of Differential Equations. 1968. Vol. 4. No.1. P. 12-39. {in English}
11. Loveikin V.S., Romasevych Yu.O., Chovniuk Yu.V., Kadykalo I.O. Dynamika y optymizatsiia pidiomno-transportnykh mashyn. K.: TsP «Komprint», 2019. 292 s. {in Ukrainian}
12. Loveikin V.S., Chovniuk Yu.V., Dikteruk M.H., Pastushenko S.I. Modeliuvannia dynamiky mekhanizmiv vantazhopidiomnykh mashyn. K.-Mykolaiv: RVV MDAU, 2004. 286 s. {in Ukrainian}
13. Loveikin V.S., Chovniuk Yu.V., Romasevych Yu.O. Zastosuvannia metodiv variatsiinoho chyslennia v zadachakh optymalnoho upravlinnia vantazhopidiomnymy mashynamy silskohospodarskoho pryznachennia. Pidiomno-transportna tekhnika. 2010. № 2. S. 3-15. {in Ukrainian}.