

УДК69.00.25

DOI: <https://doi.org/10.32347/tb.2024-40.0304>**Андрій Заприво́да**

кандидат технічних наук,  
завідувч кафедри автоматизації технологічних процесів,  
Київський національний університет будівництва і архітектури,  
просп. Повітряних сил 31, м. Київ, 03037, Україна  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9171-9325>  
E-mail: [zapryvoda.av@knuba.edu.ua](mailto:zapryvoda.av@knuba.edu.ua)

**ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗСІЯННЯ ЕНЕРГІЇ ЗА ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОЮ МОДЕЛЮЮ ДВОМІСНОЮ ВІБРАЦІЙНОЮ СИСТЕМОЮ**

**АНОТАЦІЯ.** В роботі досліджено енергію процесу коливань за дискретною моделлю двомісної вібраційної системи «робочий орган машини- ущільнюоче середовище». Виявлено, що з малим розсіюванням енергії в разі дії сили на одну з мас при заданій амплітуді коливань цієї маси відношення амплітуд коливань в резонансному режимі визначається тільки параметрами другої маси і співвідношенням між масами. Визначені умови впливу дисипації в режимі резонансу на частоті, близькій до часткової частоти тої маси, на яку діє зовнішня сила. При цьому різниця між силою інерції, що діє на другу масу і силою пружності не дорівнює нулю. Тому вплив дисипації незначний. У разі резонансу на частоті, викликаній другою масою роль сил розсіювання зростає. Розсіяння енергії, що пов'язане з масою на яку діє зовнішня сила, здійснює істотний вплив на частоту першого резонансу. Отримані результати досліджень є важливою інформацією для проектування вібраційних машин даного класу, в тому числі поверхневих машин для улаштуванні бетонних доріг.

**Ключові слова:** енергія, двомісна вібраційна система, резонанс, параметри, амплітуда, частота коливань.

**1. Постановка проблеми.** Вібраційні машини широко використовуються в будівельній індустрії при формуванні бетонних і залізобетонних виробів та в дорожньому будівництві при ущільненні ґрунтів та улаштуванні асфальтобетонних та бетонних доріг. Їх робота характеризується значними витратами енергії, що обумовлено рядом причин, в тому числі використання неефективних режимів та параметрів. Одна із причин такого стану вібраційного обладнання є складність протікання технологічного процесу, застосування емпіричних залежностей для розрахунку енергетичних параметрів, що приводить в реальному процесі до розбіжності розрахункових та дійсних числових значень параметрів. Тому актуальною є проблема розробки теорії руху такого класу машин, побудована на використанні фізичних моделей, що враховують ті властивості і характеристики, які адекватно відображають поведінку ущільнюючих матеріалів. Та застосування математичних моделей, що описують реальний процес роботи вібраційної техніки. В роботі використовуються дискретно – континуальні моделі, які є найбільш наближеними до реальних умов роботи.

**2. Аналіз публікацій по темі дослідження.** Дослідженню та визначенню енергетичних показників вібраційної техніки присвячено ряд робіт. Так, в роботі [1] при дослідженні вібромайданчика з просторовими коливаннями використана дискретна модель. В роботі [2] використана дискретна модель в дослідженнях процесів сортування вібраційним грохотом. В роботі [3] при моделюванні вібраційного змішувача приведена дискретна модель. Отримані результати досліджень в рамках дискретної моделі справедливі виключно в межах проведених досліджень. Дискретно-континуальна модель прийнята в роботах [4,5] є більш реальною, проте закони зміни властивостей ущільнюючого матеріалу потребують корекції. Для можливого моделювання процесу розсіяння енергії можна використати критерії подібності [4,6]. Таким чином, на основі приведенного аналізу літературних джерел можна констатувати, що існує проблема подальшого вдосконалення теорії руху вібраційних машин. Вона має бути побудована на використанні фізичних моделей, що враховують ті властивості і характеристики, які адекватно відображають поведінку ущільнюючих матеріалів.

**3. Мета і завдання дослідження.** Метою дослідження є розробка моделі та дослідження й визначення розподілу енергії в елементах системи «вібраційна машина – ущільнююча бетонна суміш». Для досягнення мети дослідження визначені наступні завдання:

- обґрунтування та вибір методу дослідження енергії в елементах системи «вібраційна машина – ущільнююча бетонна суміш»;
- дослідження енергії в елементах системи «вібраційна машина – ущільнююча бетонна суміш».

**4. Обґрунтування та вибір методу дослідження енергії в елементах системи «вібраційна машина – ущільнююча бетонна суміш».**

Як відомо [4] будь-якій коливальній системі притаманні маса, пружність і опір або розділені по окремим частинам системи (дискретні системи), або кожний будь-який шар володіє цими властивостями (континуальні системи). Вочевидь виникає запитання, щодо можливого застосування дискретної моделі як більш спрощеної за безумовним забезпеченням допустимих похибок при розрахунках. Щоби відповісти на подібне запитання у якості вихідної можна взяти модель з розподіленими (континуальними) властивостями і оцінити якісну картину часу розповсюдження хвиль у порівнянні з періодом коливань. Дійсно, якщо в середовищі під дією тої чи іншої сили то деформація буде розповсюджуватися зі швидкістю

$$c = \sqrt{E/\rho}, \quad (1)$$

де  $E$  – модуль пружності;  $\rho$  – щільність середовища.

Вочевидь, що стан пружного збурення буде розповсюджений на відстань  $l$  за час

$$\tau = l/c = l\sqrt{\rho/E}, \quad (2)$$

Якщо  $\tau < T$ , де  $T$  період коливань ( $T = 2\pi/\omega$ ), то за час  $\tau$  фаза коливань практично не змінюється, що в результаті відображає розподіл параметрів процесу (наприклад, амплітуди коливань) без зміни за знаком. Якщо фаза прискорення частинок в шарі середовища співпадає з фазою змушуючої сили, тоді система (середовище) веде себе як абсолютно тверде тіло і пружними властивостями можна знехтувати. Якщо процес є таким, що переміщення частинок шару співпадає по фазі із змушуючою силою, то система веде себе як ідеальна пружність, вплив маси на характер вимушених коливань є незначним. Якщо виконується умова  $\tau \geq T$ , тобто лінійні розміри системи, в якій розповсюджуються хвилі, стають рівними або більшими на довжину хвилі  $\lambda$  ( $\lambda = c/T$ ), то в цьому випадку шляхом відбиття хвиль від границь, суперпозицією хвиль виникає складне хвильове поле з визначеним розподілом фаз. І в такому випадку систему необхідно розглядати як систему з розподіленими параметрами. Виходячи із наведених міркувань вібраційна систем «робочий орган машини- ущільнююче середовище» за різними ознаками їх поведінки вони представляють собою з точки зору моделювання як підсистем з дискретними (машина) і розподіленими (середовище) параметрами. В'язкі властивості моделюються демпфером, який складається з поршня, що переміщується в циліндрі з рідиною. Можливі і інші з'єднання елементів між собою, що обумовлюється необхідністю врахуванням тих чи інших властивостей та складу компонентів реальної тої чи іншої суміші. Рівняння, що описують розповсюдження хвильового процесу в суміші можна представити в такому вигляді:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial^3 u}{\partial z^2 \partial t}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 (1 + i\gamma) \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \quad (3)$$

Перше рівняння (3) описує переміщення шару суміші  $u(z, t)$ , як пружного тіла щільністю  $\rho$  зі швидкістю  $c$ . Друге рівняння (3) описує рух суміші як пружно – в'язкого тіла щільністю  $\rho$  з частото залежним розсіянням енергії, що враховується в рівнянні коефіцієнтом  $\eta$ . Третє рівняння (5.1) описує рух суміші, як пружно – в'язкого тіла щільністю  $\rho$  з частото

незалежним розсіянням енергії, що враховується в рівнянні коефіцієнтом  $\gamma$ . Перше рівняння (3) не може бути застосоване у випадку можливого резонансу, оскільки в зоні резонансу відсутність дисипативної складової дає рішення для амплітуди коливань  $A \rightarrow \infty$ . Тому для вибору залишаються друге і третє рівняння (3). На сучасному етапі розвитку вібраційної технології ущільнення будівельних сумішей третє рівняння (3) більше застосовується, внаслідок того, що для конкретної частоти коливань напружений стан визначається амплітудою коливань. Тому в подальших аналітичних дослідженнях використовується третє рівняння (3).

**5. Дослідження енергетики вібраційної системи.** Дослідження енергетики вібраційної системи здійснюється як системи з двома степенями волі, що є першою передумовою. Другою передумовою є допущення, що вібраційна машина являється зосередженими абсолютно твердими масами  $m_1$   $m_2$ , (рис.1), які рухаються під дією змінної змушуючої сили,  $F$  в ідеальних (без тертя) напрямних, і отже, у будь-який момент часу її положення може визначатися координатами  $x_1$  і  $x_2$ . При цьому маса складається із маси форми  $m_f$  та маси бетонної суміші  $m_{б.с.}$ , яка визначається на заключній стадії за методикою роботи [4]. Тобто за формою маємо дискретну модель (рис1), а при виконанні розрахунків враховуються хвильові явища, що виникають в бетонній суміші, тобто дискретно-континуальну вібраційну систему.

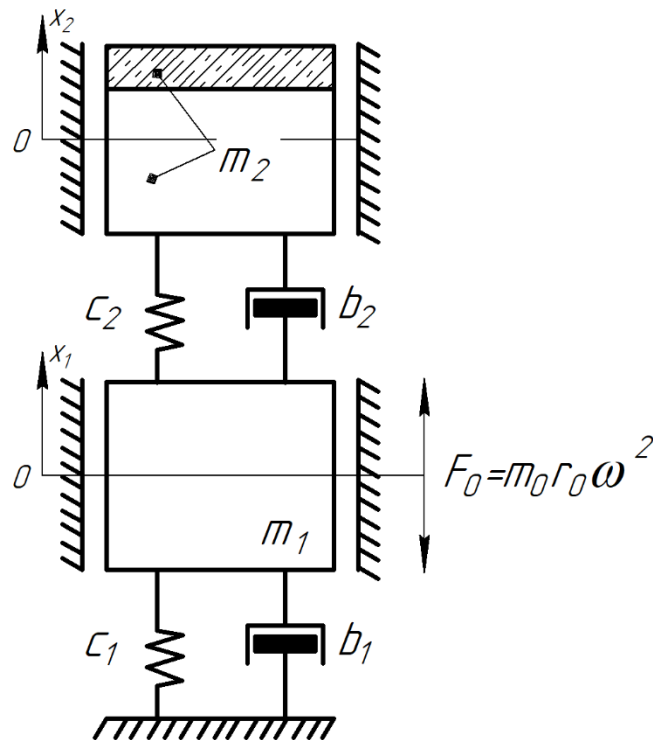


Рис. 1 Схема двомісної машини

Всі пружні властивості моделюються лінійними пружинами із коефіцієнтами пружності  $c_1$  та  $c_2$ . Опір коливанням моделюється демпфером, що відбиває в'язкий характер опору з коефіцієнтом  $b$ , ( $H \cdot c/m$ ). Такий вид опору, як відомо, пропорційний швидкості руху, що дає нам можливість спростити аналіз його впливу на коливання робочого органу.

Колівання мас можуть бути синфазними і протифазними. При цьому значення переміщення  $x_1$ , і  $x_2$  можуть бути рівними ( $x_1 = x_2$ ) або різними ( $x_1 < x_2$  і  $x_1 > x_2$ ). Напрямок і значення переміщення мас залежать від співвідношення мас, жорсткості пружних зв'язків, частоти коливань, опору і фазових кутів. В процесі коливань під дією змушувальної сили  $F(t)$  в пружинах виникають зусилля  $F_1 = c_1 x_1$  і  $F_2 = c_2 (x_2 - x_1)$ , де  $c_1, c_2$  – коефіцієнти жорсткості пружин;  $x_1, x_2$  – переміщення мас  $m_1$  і  $m_2$ ;  $F(t) = F_0 \cos \omega t$  – зовнішня змушуюча сила.

Застосовуючи метод Даламбера [4] отримаємо рівняння руху вигляд:

$$m_1 \ddot{x}_1 + b_1 \dot{x}_1 + b_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + c_1 x_1 + c_2 (x_1 - x_2) = F_0 \cos \omega t$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + b_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_2 (x_2 - x_1) = 0$$
(4)

Спочатку визначимо енергію в режимі вільних коливань. Диференційні рівняння, що описують вільні коливання системи (мають вигляд

$$m_1 \ddot{x}_1 + b_1 \dot{x}_1 + b_2 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + c_1 x_1 + c_2 (x_1 - x_2) = 0;$$

$$m_2 \ddot{x}_2 + b_2 (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + c_2 (x_2 - x_1) = 0.$$
(5)

Для рішення рівнянь (5) представимо його у матричній формі:

$$\begin{vmatrix} m_1 p^2 + (b_1 + b_2) p + c_1 + c_2 & -(b_2 p + c_2) \\ -(b_2 p + c_2) & m_2 p^2 + b_2 p + c_1 + c_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = 0.$$
(6)

Оскільки за умовою задачі переміщення мас  $m_1$  і  $m_2$  не дорівнює нулю:  $x_1 \neq 0$ ,  $x_2 \neq 0$ , то рівними нулю буде визначник системи.

$$\begin{vmatrix} m_1 p^2 + (b_1 + b_2) p + c_1 + c_2 & -(b_2 p + c_2) \\ -(b_2 p + c_2) & m_2 p^2 + b_2 p + c_1 + c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриємо визначник системи (6):

$$p^4 m_1 m_2 + p^3 (m_1 b_2 + m_2 b_1 + m_2 b_2) + p^2 (m_1 c_2 + m_2 c_1 + m_2 c_2 + b_1 b_2) + p (c_1 b_2 + c_2 b_1) + c_1 c_2 = 0.$$

Використовуючи метод комплексних чисел дане рівняння напишемо у вигляді:

$$p_{1,2} = -h_1 \pm i\omega_{11}; p_{3,4} = -h_2 \pm i\omega_{12},$$
(7)

де  $i$  - мнима одиниця;  $h_1, h_2$  - приведені коефіцієнти дисипації параметрами  $\omega_{11}, \omega_{12}$  - власні частоти коливань мас  $m_1$  і  $m_2$  з урахуванням розсіяння енергії.

Напишемо переміщення  $x_1$  і  $x_2$  мас  $m_1$  і  $m_2$  із урахуванням (7) у вигляді:

$$x_1 = \bar{x}_{a1} e^{p_1 t} + \bar{x}_{a1}^* e^{p_2 t} + \bar{x}_{b1} e^{p_3 t} + \bar{x}_{b1}^* e^{p_4 t};$$

$$x_2 = \bar{x}_{a2} e^{p_1 t} + \bar{x}_{a2}^* e^{p_2 t} + \bar{x}_{b2} e^{p_3 t} + \bar{x}_{b2}^* e^{p_4 t}.$$
(8)

Здійснивши підстановку (8) у (7) отримаємо систему комплексних величин:

$$\bar{k}_1 = \frac{\bar{x}_{a2}}{\bar{x}_{a1}}; \bar{k}_2 = \frac{\bar{x}_{a2}^*}{\bar{x}_{a1}^*} = \bar{k}_1^*; \bar{k}_3 = \frac{\bar{x}_{b2}}{\bar{x}_{b1}}; \bar{k}_4 = \frac{\bar{x}_{b2}^*}{\bar{x}_{b1}^*} = \bar{k}_3^*;$$

$$\bar{k}_n = \frac{m_1 p_i^2 + (b_1 + b_2) p_i + c_1 + c_2}{b_2 p_i + c_2} = \frac{b_2 p_i + c_2}{m_1 p_i^2 + b_2 p_i + c_2},$$

$$n = 1 \div 4.$$
(9)

Враховуючи (7) і (9), рішення коливань вібраційної системи (8) буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} x_1 &= \bar{x}_{a1} e^{(-h_1+j\omega_{11})t} + \bar{x}_{a1}^* e^{(-h_1+j\omega_{11})t} + \bar{x}_{b1} e^{(-h_2+j\omega_{12})t} + \bar{x}_{b1}^* e^{(-h_2+j\omega_{12})t}; \\ x_2 &= \bar{k}_1 \bar{x}_{a1} e^{(-h_1+j\omega_{11})t} + \bar{k}_2 \bar{x}_{a1}^* e^{(-h_1+j\omega_{11})t} + \bar{k}_3 \bar{x}_{b1} e^{(-h_2+j\omega_{12})t} + \bar{k}_4 \bar{x}_{b1}^* e^{(-h_2+j\omega_{12})t}. \end{aligned} \quad (10)$$

Введемо наступні позначення комплексних величин  $\bar{x}_{a1}, \bar{x}_{b1}, \bar{k}_1 - \bar{k}_4$  у вигляді:

$$\begin{aligned} \bar{x}_{a1} &= \frac{1}{2} x_{a1} e^{j\varphi_1}; \bar{x}_b = \frac{1}{2} x_{b1} e^{j\varphi_2}; \bar{x}_{a1}^* = \frac{1}{2} x_{a1} e^{-j\varphi_1}; \bar{x}_{b1}^* = \frac{1}{2} x_{a1} e^{-j\varphi_1}; \\ \bar{k}_1 &= k_1 e^{j\alpha_1}; \bar{k}_3 = k_2 e^{j\alpha_2}; \bar{k}_2 = k_1 e^{-j\alpha_1}; \bar{k}_4 = k_2 e^{-j\alpha_2}; \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} k_i &= \sqrt{a_{ki}^2 + b_{ki}^2}; \alpha_i = \arctg \frac{b_{ki}}{a_{ki}}; \\ \alpha_{ki} &= \frac{1}{(c_2 - b_2 h_i)^2 + \omega_i^2 b_2^2} \left[ -b_2 h_i^3 m_1 + b_2 h_i^2 (b_1 + b_2) - \right. \\ &\quad \left. - b_2 h_i c_1 + m_1 h_i \omega_i^2 b_2 + c_2 m_1 h_i^2 - 2b_2 c_2 h_i - c_2 m_1 \omega_i^2 - \right. \\ &\quad \left. h_i c_2 b_1 - c_2 (c_1 + c_2) \right]; \\ b_{ki} &= \frac{1}{(c_2 - b_2 h_i)^2 + \omega_i^2 b_2^2} \left[ m_1 b_2 h_i^2 \omega_i + m_1 \omega_i^3 b_2 - \right. \\ &\quad \left. - b_2 \omega_i (c_1 + c_2) - 2m_1 h_i \omega_i c_2 + c_2 (b_1 + b_2) \right]. \\ i &= 1, 2 \end{aligned}$$

Вносимо ці позначення в (10):

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} x_{a1} e^{(-h_1+j\omega_{11})t+j\varphi_1} + \frac{1}{2} x_{a1} e^{(-h_1+j\omega_{11})t-j\varphi_1} + \\ &\quad \frac{1}{2} x_{b1} e^{(-h_2+j\omega_{12})t+j\varphi_2} + \frac{1}{2} x_{b1} e^{(-h_2+j\omega_{12})t-j\varphi_2}; \\ x_2 &= \frac{1}{2} k_1 x_{a1} e^{(-h_1+j\omega_{11})t+j(\varphi_1+\alpha_1)} + \frac{1}{2} k_1 x_{a1} e^{(-h_1-j\omega_{11})t-j(\varphi_1+\alpha_1)} + \\ &\quad \frac{1}{2} k_2 x_{b1} e^{(-h_2+j\omega_{12})t+j(\varphi_2+\alpha_2)} + \frac{1}{2} k_2 x_{b1} e^{(-h_2-j\omega_{12})t-j(\varphi_2+\alpha_2)}; \end{aligned} \quad (11)$$

Для зручності запису та аналізу (11) використовуємо відому формулу Ейлера[4]

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}; \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \quad (12)$$

Тоді із урахуванням (12) залежність (11) матиме вигляд:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{a1} e^{-h_1 t} \cos(\omega_{11} t + \varphi_1) + x_{a1} e^{-h_2 t} \cos(\omega_{12} t + \varphi_2); \\ x_2 &= k_1 x_{a1} e^{-h_1 t} \cos(\omega_{11} t + \varphi_1 + \alpha_1) + k_2 x_{a1} e^{-h_2 t} \cos(\omega_{12} t + \varphi_2 + \alpha_2); \end{aligned} \quad (13)$$

У виразу (13) величини  $h_1, h_2, \omega_{11}, \omega_{12}, k_1, k_2, \alpha_1, \alpha_2$  визначаються параметри системи (5)  $[m_1; m_2; b_1; b_2; c_1; c_2]$ , а величини  $x_{a1}, x_{b1}, \varphi_1$  і  $\varphi_2$  - початковими умовами  $[x_1(0) = x_{10}; \dot{x}_1(0) = \dot{x}_{10}; x_2(0) = x_{20}; \dot{x}_2(0) = \dot{x}_{20}]$ . Підставивши початкові умови в рівняння (13), отримуємо

$$\left. \begin{aligned} x_{10} &= x_{a1} \cos \varphi_1 + x_{b1} \cos \varphi_2; \\ x_{20} &= k_1 x_{a1} \cos(\varphi_1 + \alpha_1) + k_2 x_{b1} \cos(\varphi_2 + \alpha_2); \\ -x_{10} &= h_1 x_{a1} \cos \varphi_1 + \omega_{11} x_{a1} \sin \varphi_1 + h_2 \cos \varphi_2 + \omega_{12} x_{b1} \sin \varphi_2; \\ -x_{20} &= k_1 h_1 x_{a1} \cos(\varphi_1 + \alpha_1) + k_1 \omega_{11} x_{a1} \sin(\varphi_1 + \alpha_1) + \\ &+ k_2 h_2 x_{b1} \cos(\varphi_2 + \alpha_2) + k_2 \omega_{12} x_{b1} \sin(\varphi_2 + \alpha_2), \end{aligned} \right\}$$

або

$$\begin{aligned} x_{10} &= x_{a1} \cos \varphi_1 + x_{b1} \cos \varphi_2; \\ x_{20} &= k_1 x_{a1} \cos(\varphi_1 + \alpha_1) + k_2 x_{b1} \cos(\varphi_2 + \alpha_2); \\ -x_{10} &= k_{oh1} k_1 x_{a1} \sin(\varphi_1 + \beta_1) + k_{oh2} x_{b1} \sin(\varphi_2 + \beta_2); \\ -x_{20} &= k_{oh1} k_1 x_{a1} \sin(\varphi_1 + \alpha_1 + \beta_1) + k_{oh2} x_{b1} \sin(\varphi_2 + \alpha_2 + \beta_2), \end{aligned} \quad (14)$$

де

$$\begin{aligned} k_{oh1} &= \sqrt{h_1^2 + \omega_{11}^2}; k_{oh2} = \sqrt{h_2^2 + \omega_{12}^2}; \\ \beta_1 &= \arctg \frac{h_1}{\omega_{11}}; \beta_2 = \arctg \frac{h_2}{\omega_{12}}. \end{aligned}$$

Для визначення невідомих  $x_{a1}, x_{b1}, \varphi_1$  і  $\varphi_2$  напишемо систему (14) у вигляді

$$\left. \begin{aligned} x_{10} &= x_{a1} \cos \varphi_1 + x_{b1} \cos \varphi_2; \\ x_{20} + \Delta x_{20} &= k_1 x_{a1} \cos \varphi_1 + k_2 x_{b1} \cos \varphi_2; \\ -x_{10} - \Delta x_{10} &= k_{oh1} x_{a1} \sin \varphi_1 + k_{oh2} x_{b1} \sin \varphi_2; \\ -x_{20} - \Delta x_{20} &= k_1 k_{oh1} x_{a1} \sin \varphi_1 + k_2 k_{oh2} x_{b1} \sin \varphi_2 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

Для знаходження  $x_{a1}, x_{b1}, \varphi_1$  і  $\varphi_2$  приймаємо наступні початкові умови:

$$\begin{aligned} x_1(0) &= x_{10}; \dot{x}_1(0) = \dot{x}_{10}; \\ x_2(0) &= x_{20}; \dot{x}_2(0) = \dot{x}_{20}, \end{aligned} \quad (16)$$

Тоді із врахуванням (16) матимемо:

$$\left. \begin{aligned} x_{10} &= x_{a1} \sin \varphi_1 + x_{b1} \sin \varphi_2; \\ x_{10} &= x_{a1} \omega_{01} \cos \varphi_1 + x_{b1} \omega_{02} \cos \varphi_2; \\ x_{20} &= k_1 x_{a1} \sin \varphi_1 + k_2 x_{b1} \sin \varphi_2; \\ x_{20} &= k_1 \omega_{01} x_{a1} \cos \varphi_1 + k_2 \omega_{02} x_{b1} \cos \varphi_2. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Для пошуку амплітуд  $x_{a1}$  і  $x_{b1}$  та фазових кутів  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$  здійснимо незнані перетворення шляхом множення першого і другого рівняння системи (17) на коефіцієнт  $k_1$ . Далі

вираховуємо із отриманих рівнянь відповідно третє і четверте рівняння цієї системи. А потім таку ж процедуру проведемо із використанням коефіцієнта  $k_2$ . Таке рішення надає можливість отримати залежності у вигляді, зручному для пошуку фазових кутів  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$  та амплітуд коливань  $x_{a1}$  і  $x_{b1}$  мас  $m_1$  і  $m_2$ :

$$\left. \begin{aligned} k_1 x_{10} - x_{20} &= (k_1 - k_2) x_{b1} \sin \varphi_2; \\ k_1 x_{10} - x_{20} &= \omega_{02} (k_1 - k_2) x_{b1} \cos \varphi_2; \\ k_2 x_{10} - x_{20} &= (k_2 - k_1) x_{a1} \sin \varphi_1; \\ k_2 x_{10} - x_{20} &= \omega_{01} (k_2 - k_1) x_{a1} \cos \varphi_1. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Форма запису (18) надає можливість записати вирази відносно фазових кутів  $\varphi_1$  і  $\varphi_2$ :

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \arctg \frac{\omega_{01} (k_2 x_{10} - x_{20})}{k_2 \dot{x}_{10} - \dot{x}_{20}}; \\ \varphi_2 &= \arctg \frac{\omega_{02} (k_1 x_{10} - x_{20})}{k_1 \dot{x}_{10} - \dot{x}_{20}}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

В остаточному вигляді із врахуванням тригонометричних формул для  $\sin \varphi$  та  $\cos \varphi$  отримуємо наступні вирази:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= \arctg \frac{x_{20} + \Delta x_{20} - k_2 (x_{10} + \Delta x_{10})}{k_{\omega h1} (k_1 x_{10} - x_{20} - \Delta x_{20})}; \\ \varphi_2 &= \arctg \frac{x_{20} + \Delta x_{20} - k_1 (x_{10} + \Delta x_{10})}{k_{\omega h2} (k_1 x_{10} - x_{20} - \Delta x_{20})}; \\ \sin \varphi_1 &= \frac{x_{20} + \Delta x_{20} - k_2 (x_{10} + \Delta x_{10})}{\sqrt{(x_{20} + \Delta x_{20} - k_2 (x_{10} + \Delta x_{10}))^2 + k_{\omega h2}^2 (k_1 x_{10} - x_{20} - \Delta x_{20})^2}}; \\ \sin \varphi_2 &= \frac{x_{20} + \Delta x_{20} - k_1 (x_{10} + \Delta x_{10})}{\sqrt{(x_{20} + \Delta x_{20} - k_1 (x_{10} + \Delta x_{10}))^2 + k_{\omega h1}^2 (k_2 x_{10} - x_{20} - \Delta x_{20})^2}}; \\ \cos \varphi_1 &= \frac{k_{\omega h2} (k_1 x_{10} - x_{20} - \Delta x_{20})}{\sqrt{(x_{20} + \Delta x_{20} - k_2 (x_{10} + \Delta x_{10}))^2 + k_{\omega h2}^2 (k_1 x_{10} - x_{20} - \Delta x_{20})^2}}; \\ \cos \varphi_2 &= \frac{k_{\omega h1} (k_2 x_{10} - x_{20} - \Delta x_{20})}{\sqrt{(x_{20} + \Delta x_{20} - k_1 (x_{10} + \Delta x_{10}))^2 + k_{\omega h1}^2 (k_2 x_{10} - x_{20} - \Delta x_{20})^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Підставивши вираз (21) в систему (15), знаходимо

$$\left. \begin{aligned} x_{a1} &= \frac{1}{k_{\omega h1} (k_2 - k_1)} \sqrt{(x_{20} + \Delta x_{20} - k_2 (x_{10} + \Delta x_{10}))^2 + k_{\omega h2}^2 (k_1 x_{10} - x_{20} - \Delta x_{20})^2}; \\ x_{b1} &= \frac{1}{k_{\omega h2} (k_1 - k_2)} \sqrt{(x_{20} + \Delta x_{20} - k_1 (x_{10} + \Delta x_{10}))^2 + k_{\omega h1}^2 (k_2 x_{10} - x_{20} - \Delta x_{20})^2}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Із рівнянь (14) та (15) визначаємо

$$\left. \begin{aligned} \Delta x_{20} &= k_1 x_{a1} |\cos \varphi_1 - \cos(\varphi_1 + \alpha_1)| + k_2 x_{b1} |\cos \varphi_2 - \cos(\varphi_2 + \alpha_2)|; \\ -\Delta x_{10} &= k_{oh1} x_{a1} [\sin \varphi_1 - \sin(\varphi_1 + \beta_1)] + k_{oh} x_{b1} [\sin \varphi_2 - \sin(\varphi_2 + \beta_2)]; \\ -\Delta x_{20} &= k_1 k_{oh1} x_{a1} [\sin \varphi_2 - \sin(\varphi_1 + \alpha_1 + \beta_1)] + k_2 k_{oh2} x_{b1} [\sin \varphi_2 - \alpha_2 + \beta_2]. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

В результаті перетворення системи (23) приймає вид

$$\left. \begin{aligned} a_{z11} z_1 + a_{z12} z_2 + a_{z13} z_3 &= b_{z1}; \\ a_{z21} z_1 + a_{z22} z_2 + a_{z23} z_3 &= b_{z2}; \\ a_{z31} z_1 + a_{z32} z_2 + a_{z33} z_3 &= b_{z3}; \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

де

$$\begin{aligned} z_1 &= \Delta x_{20}; z_2 = \Delta x_{10}; z_3 = \Delta x_{20}; a_{z11} = 1 + \frac{k_{k1}}{k_{oh1}} \alpha_{11} k_{oh2} + \frac{k_{k2}}{k_{oh2}} \alpha_{21} k_{oh1}; \\ a_{z12} &= \frac{k_{k1}}{k_{oh1}} k_2 \sin \alpha_1 + \frac{k_{k2}}{k_{oh2}} k_1 \sin \alpha_2; a_{z13} = -\frac{k_{k1}}{k_{oh1}} \sin \alpha_1 - \frac{k_{k2}}{k_{oh2}} \sin \alpha_2; \\ a_{z21} &= -\frac{k_{k1}}{k_1} k_{oh2} \sin \beta_1 - \frac{k_{k2}}{k_2} k_{oh1} \sin \beta_2; a_{z22} = -1 + \frac{k_{k1}}{k_1} \beta_{11} k_2 + \frac{k_{k2}}{k_2} \beta_{21} k_1; \\ a_{z23} &= -\frac{k_{k1}}{k_1} \beta_{11} + \frac{k_{k2}}{k_2} \beta_{21}; a_{z31} = -k_{k1} k_{oh2} \sin(\alpha_1 + \beta_1) - k_{k2} k_{oh1} \sin(\alpha_2 + \beta_2); \\ a_{z32} &= k_{k1} \alpha_{\beta 1} k_2 + k_{k2} \alpha_{\beta 2} k_1; a_{z33} = -1 - k_{k1} \alpha_{\beta 1} - k_{k2} \alpha_{\beta 2}; \\ b_{z1} &= \frac{k_{k1}}{k_{oh1}} [k_{oh2} \alpha_{11} (k_1 x_{10} - x_{20}) + \sin \alpha_1 (x_{20} - k_2 x_{10})] + \\ &+ \frac{k_{k2}}{k_{oh2}} [k_{oh1} \alpha_{21} (k_2 x_{10} - x_{20}) + \sin \alpha_2 (x_{20} - k_1 x_{10})]; \\ b_{z2} &= \frac{k_{k1}}{k_1} [\beta_{11} (x_{20} - k_2 x_{10}) - k_{oh2} \sin \beta_1 (k_1 x_{10} - x_{20})] + \\ &+ \frac{k_{k2}}{k_2} [\beta_{21} (x_{20} - k_1 x_{10}) - k_{oh1} \sin \beta_2 (k_2 x_{10} - x_{20})]; \\ b_{z3} &= k_{k1} [\alpha_{\beta 1} (x_{20} - k_2 x_{10}) - k_{oh2} \sin(\alpha_1 + \beta_1) (k_1 x_{10} - x_{20})] + \\ &+ k_{k2} [\alpha_{\beta 2} (x_{20} - k_1 x_{10}) - k_{oh1} \sin(\alpha_2 + \beta_2) (k_2 x_{10} - x_{20})]; \\ k_{k1} &= \frac{k_1}{k_2 - k_1}; k_{k2} = \frac{k_2}{k_1 - k_2}; \alpha_{11} = 1 - \cos \alpha_1; \\ \alpha_{21} &= 1 - \cos \alpha_2; \beta_{11} = 1 - \cos \beta_1; \beta_{21} = 1 - \cos \beta_2; \\ \alpha_{\beta 1} &= 1 - \cos(\alpha_1 + \beta_1); \alpha_{\beta 2} = 1 - \cos(\alpha_2 + \beta_2). \end{aligned}$$

де

Рішення системи рівнянь (24)

$$z_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; z_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; z_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \quad (25)$$



де

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{z11} & a_{z12} & a_{z13} \\ a_{z21} & a_{z22} & a_{z23} \\ a_{z31} & a_{z32} & a_{z33} \end{vmatrix};$$

Для отримання виразу енергії формули переміщень  $x_1, x_2$ , (2.28). та швидкостей  $\dot{x}_1, \dot{x}_2$ , як похідних від переміщень  $x_1, x_2$ , підставляємо у рівняння енергій (26):

$$E = T + \Pi = \frac{1}{2} \left[ m_1 \dot{x}_1^2 + m_2 \dot{x}_2^2 + c_1 x_1^2 + c_2 (x_2 - x_1)^2 \right]. \quad (26)$$

У результаті перетворень воно має вигляд

$$\begin{aligned} E_t = & \frac{1}{2} x_{a1}^2 e^{-2h_1 t} \{ c_1 \cos^2(\omega_1 t + \varphi_1) + c_2 [\cos(\omega_1 t + \varphi_1) - k_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1 + \alpha_1)]^2 + m_1 [h_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \omega_{11} \sin(\omega_1 t + \varphi_1)]^2 + \\ & + m_2 k_1^2 [h_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1 + \alpha_1) + \omega_{11} \sin(\omega_1 t + \varphi_1 + \alpha_1)]^2 \} + x_{a1} x_{b1} e^{-2(h_1 + h_2)t} \{ c_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \\ & + c_2 [\cos(\omega_2 t + \varphi_2) - k_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2 + \alpha_2)] \times [\cos(\omega_1 t + \varphi_1) - k_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1 + \alpha_1)] + \\ & + m_1 [h_1 \cos(\omega_2 t + \varphi_1) + \omega_{11} \sin(\omega_2 t + \varphi_1)] \times [h_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \omega_{12} \sin(\omega_2 t + \varphi_2)] + \\ & + m_2 k_1 k_2 [h_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1 + \alpha_1) + \omega_{11} \sin(\omega_1 t + \varphi_1 + \alpha_1)] \times [h_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2 + \alpha_2) + \omega_{12} \sin(\omega_2 t + \varphi_2 + \alpha_2)] \} + \\ & + \frac{1}{2} x_{b1}^2 e^{-2h_2 t} \{ c_1 \cos^2(\omega_2 t + \varphi_2) + c_2 [\cos(\omega_2 t + \varphi_2) - k_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2 + \alpha_2)]^2 + \\ & + m_1 [h_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \omega_{12} \sin(\omega_2 t + \varphi_2 + \alpha_2)]^2 + m_2 k_2^2 [h_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2 + \alpha_2) + \omega_{12} \sin(\omega_2 t + \varphi_2 + \alpha_2)]^2 \}. \end{aligned} \quad (27)$$

В початковий момент  $t=0$  енергія системи описується виразом

$$\begin{aligned} E_t = & \frac{1}{2} x_{a1}^2 \{ c_1 \cos^2 \varphi_1 + c_2 [\cos \varphi_1 - k_1 c_2 \cos(\varphi_1 + \alpha_1)]^2 + m_1 [h_1 \cos \varphi_1 + \omega_{11} \sin \varphi_1]^2 + \\ & + m_2 k_1^2 [h_1 \cos(\varphi_1 + \alpha_1) + \omega_{11} \sin(\varphi_1 + \alpha_1)]^2 \} + x_{a1} x_{b1} \{ c_1 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \\ & + c_2 [\cos \varphi_2 - k_2 \cos(\varphi_2 + \alpha_2)] \times [\cos \varphi_1 - k_1 \cos(\varphi_1 + \alpha_1)] + \\ & + m_1 [h_1 \cos \varphi_1 + \omega_{11} \sin \varphi_1] \times [h_2 \cos \varphi_2 + \omega_{12} \sin \varphi_2] + \\ & + m_2 k_1 k_2 [h_1 \cos(\varphi_1 + \alpha_1) + \omega_{11} \sin(\varphi_1 + \alpha_1)] \times [h_2 \cos(\varphi_2 + \alpha_2) + \omega_{12} \sin(\varphi_2 + \alpha_2)] \} + \\ & + \frac{1}{2} x_{b1}^2 \{ c_1 \cos^2 \varphi_2 + c_2 [\cos \varphi_2 - k_2 \cos(\varphi_2 + \alpha_2)]^2 + m_1 [h_2 \cos \varphi_2 + \omega_{12} \sin(\varphi_2 + \alpha_2)]^2 + \\ & + m_2 k_2^2 [h_2 \cos(\varphi_2 + \alpha_2) + \omega_{12} \sin(\varphi_2 + \alpha_2)]^2 \}. \end{aligned} \quad (28)$$

Енергія, розсіяна за час  $t$ , складає  $\Delta E = E_0 - E_t$ .

Оскільки частоти  $\omega_{11}$  і  $\omega_{12}$  в загальному випадку різні то і не може бути загального періоду коливань. Тому розсіяння енергії визначається за якийсь проміжок часу  $\Delta t_i = t_1 - t_0, i = 1, 2, \dots, n$ .

$$\left. \begin{aligned} x_1 = x_{10} = 0; \quad x_2 = x_{20} = 0; \\ x_1 = x_{10} \neq 0; \quad x_2 = x_{20} \neq 0. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

В цьому випадку виразу (26) приймає вигляд

$$E_0 = T_{\max} = \frac{1}{2}(m_1 x_{10}^2 + m_2 x_{20}^2), \quad (30)$$

тобто вся початкова енергія виражена у формі кінетичної, яка в дисипативній системі в момент  $t = 0$  максимальна. Потенціальна енергія в цей момент дорівнює нулю.

Вираз (29) дає можливість розглянути розсіяння енергії в системі за інтервали часу  $\Delta t_i$ , визначаються моментами  $t_i$  в яких потенціальна енергія системи рівна нулю:  $x_{1i} = x_{2i} = 0$ . Тоді енергія системи  $E_i$  рівна кінетичній  $T_{i\max}$  і виражається залежністю

$$E_i = T_{i\max} = \frac{1}{2}(m_1 x_{1t}^2 + m_2 x_{2t}^2). \quad (31)$$

Розсіяння енергії за час  $\Delta t_i$  визначається виразом

$$\Delta E_i = \frac{1}{2}[m_1(x_{10}^2 - x_{1i}^2) + m_2(x_{20}^2 - x_{2i}^2)]. \quad (32)$$

де

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1(t_i) = -x_{a1}\omega_{1h}e^{-h_1 t_i} \sin(\omega_{11}t_i + \varphi_1 + \gamma_1) - x_{b1}\omega_{2h}e^{-h_2 t_i} \sin(\omega_{12}t_i + \varphi_2 + \gamma_2); \\ x_{2i} &= x_2(t_i) = -k_i x_{a1}\omega_{1h}e^{-h_1 t_i} \sin(\omega_{11}t_i + \varphi_1 + \alpha_1 + \gamma_1) - k_2 x_{b1}\omega_{2h}e^{-h_2 t_i} \sin(\omega_{11}t_i + \varphi_2 + \alpha_2 + \gamma_2); \\ \omega_{1h} &= \sqrt{h_1^2 + \omega_{11}^2}; \quad \omega_{2h} = \sqrt{h_2^2 + \omega_{12}^2}; \\ \gamma_1 &= \arctg \frac{\omega_{11}}{h_1}; \quad \gamma_2 = \arctg \frac{\omega_{12}}{h_2}. \end{aligned}$$

Тепер визначимо рішення вимушених коливань вібраційної системи (4) для сталого режиму:

$$\begin{aligned} x_1 &= A_1 \cos \omega t + A_2 \sin \omega t; \\ x_2 &= A_3 \cos \omega t + A_4 \sin \omega t. \end{aligned} \quad (33)$$

Константи  $A_1 \dots A_4$  визначаються підстановкою рівнянь (33) в (4) В результаті отримуємо

$$A_{i1} = \frac{\Delta_{cl}}{\Delta}, \quad i = \bar{1}, \bar{4}, \quad (34)$$

де

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_1 + c_2 - m_1 \omega^2 & (b_1 + b_2) \omega & -c_2 & b_2 \omega \\ -\omega(b_1 + b_2) & c_1 + c_2 - m_1 \omega^2 & b_2 \omega & -c_2 \\ -c_2 & -b_2 \omega & c_2 - m_2 \omega^2 & \omega b_2 \\ \omega b_2 & -c_2 & -\omega b_2 & c_2 - m_2 \omega^2 \end{vmatrix} \quad (35)$$

$\Delta$  - визначники, отримані з (35) шляхом заміни  $i$ -го стовпця на стовпець виду  $(F_{01}, 0, 0)$ .

Рішення (33) можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} x_1 &= x_{a1} \cos(\omega t - \varphi_1) \\ x_2 &= x_{a2} \cos(\omega t - \varphi_2) \end{aligned} \quad (36)$$

де

$$x_{01} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}; \quad x_{02} = \sqrt{A_3^2 + A_4^2}$$

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} \frac{A_2}{A_1}; \quad \varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{A_4}{A_3}$$

Робота, виконана зовнішньою гармонічною силою, дорівнює роботі, виконаній на першій масі:

$$A_F = \pi F_{1a} x_a \sin \varphi_1. \quad (37)$$

На резонансних частотах  $\omega_{01}$  і  $\omega_{02}$

$$|\sin \varphi_{1\omega 01}| = |\sin \varphi_{1\omega 02}| = 1.$$

Енергія, що розсіюється в системі, становить

$$\Delta E = \pi \omega \left[ b_1 x_{a1}^2 + b_2 (x_{a2} - x_{a1})^2 \right]. \quad (38)$$

В режимі резонансу вирази (37) і (38) будуть рівними між собою. Із цієї рівності отримавмо співвідношення:

$$x_{a1} = \frac{F_{a1}}{b_1 \omega_p + b_2 \omega_p \left( \frac{x_{a2}}{x_{a1}} - 1 \right)^2}, \quad (40)$$

яка буде максимальною при  $x_{a1} = x_{a2}$ , в разі нескінченно великих значень коефіцієнта пружності  $c_2$  або демпфування  $b_2$ . Тоді рівняння (40) набуває вигляду:

$$x_{a1p} = F_{a1} / b_1 \omega_p, \quad (41)$$

**6. Обговорення результатів досліджень.** Розгляд вільних коливань дав можливість здійснити аналіз співвідношення кінетичної і потенційної енергії в різних частинах руху системи. Амплітуди коливань маси  $m_1$   $X_{01}$  і маси  $m_2$   $X_{02}$  будуть максимальними в резонансному режимі системи. Резонансні частоти мають вигляд коренів характеристичного рівняння  $\Delta = 0$ . На резонансах максимальні амплітуди коливань будуть на рівні  $b_1 = b_2 = 0$ . При цьому амплітуди коливань нескінченні. При  $b_2 = \infty$  амплітуда коливань визначається тільки величиною  $b_1$ , а в разі  $b_2 = \infty$ ,  $b_1 = 0$  Вона також нескінченна. Це пов'язано з тим, що при  $b_2 = \infty$  Система стає як би одномасною з масою  $M = m_1 + m_2$ . Робота дисипативної сили в обох випадках (у разі  $b_1 = 0$ ) не здійснюється, так як в першому випадку дисипативна сила дорівнює нулю, а в другому немає відносного зміщення мас. Звідси випливає, що при значенні  $0 < b_2 < \infty$  робота дисипативної сили буде максимальною, а резонансна амплітуда коливань другої маси приймає мінімальне значення. Відношення амплітуд масових коливань у резонансних режимах системи визначені на основі розглянутих енергетичних взаємозв'язків.

## 7. Висновки.

1. Для двомісної системи з малим розсіюванням в разі дії сили на одну з мас (наприклад,  $m_1$ ) при заданій амплітуді коливань цієї маси відношення амплітуд коливань в резонансному режимі визначається тільки параметрами другої маси і співвідношенням між масами та коефіцієнта  $b_2$ .

2. При резонуванні на частоті, близькій до власної частоти маси  $m_1$ , на яку діє сила  $F_{01}$ , різниця між силою інерції, що діє на другу масу  $m_2$ , і силою пружності не дорівнює нулю.

Тому вплив дисипації незначний. У разі резонансу на частоті, викликаній другою масою  $m_2$ , роль сил розсіювання зростає.

3. Розсіювання енергії, що пов'язане з масою  $m_1$ , робить істотний вплив на частоту першого резонансу  $\omega_{01}$ , але на частоті  $\omega_{02}$  його вплив не значний.

4. При стаціонарних коливаннях середня енергія, що циркулює в системі, зберігається.

5. Кожен період джерело поповнює витрати енергії для стаціонарного стану розсіювання енергії має дорівнювати роботі, виконаній за цей період зовнішньою силою  $F_{01}$ , прикладеною до системи.

6. Отримані результати використані при розробки алгоритмів та методики розрахунку параметрів вібраційної установки із енергоощадним режимом роботи.

### Список використаних джерел:

1. Nesterenko M.P. and others. Vibration platform for forming large-sized reinforced concrete products // *Naukovyi Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu*, 2019, No 5. – P. 284 – 288.
2. Орищенко С.В. Теоретичні дослідження та визначення основних етапів руху вібраційного грохота. *Техніка будівництва*. – 2010. – № 24. – С. 44–47.
3. Ручинський М.М., Свиридчук Д.Я. Дослідження коливань вібраційного бетонозмішувача з урахуванням впливу перемішувача матеріалу. *Техніка будівництва. Науково-технічний журнал*. Київ: КНУБА, 2013. № 31. с. 35–42
4. Назаренко І.І. Прикладні задачі теорії вібраційних систем (2-е видання). К.: Видавничий дім «Слово», 2010. – 440с.
5. Ivan Nazarenko, Viktor Gaidaichuk, Oleg Dedov, Oleksandr Diachenko. Investigation of vibration machine movement with a multimode oscillation spectrum. *Eastern European Journal of Enterprise Technologies*. 2017. Vol 6, No 1 (90). P. 28–36.
6. Андрій Запривода. Ефективність процесу ущільнення будівельних сумішей для улаштування доріг. Тези V Міжнародної науково-практичної конференції «Енергоощадні машини і технології», КНУБА, 2024, - С.